

CAPÍTULO 2: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD.

TEORÍA. Matemáticas 1º y 2º de ESO

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

1.1. Los sistemas de numeración

El sistema de numeración decimal

¿Por qué en otros países, aunque se hablen lenguas diferentes, se usan los mismos números?

Esos números, los que nosotros usamos, constituyen un lenguaje universal y se dice que están expresados en el sistema decimal.

El **sistema de numeración decimal** es el más usado en todo el mundo y en casi todos los ámbitos.

En este sistema el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Actividades resueltas

En el número 4652031 tenemos:

- La cifra de las unidades: el 1

- Luego la cifra de las decenas: el 3, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será:
 $3 \cdot 10 = 30$

- En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100 (o por 10^2)

$$0 \cdot 10^2 = 0$$

- En cuarto lugar las unidades de millar :2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 (o por 10^3) la cifra situada en ese lugar :

$$2 \cdot 10^3 = 2000$$

- Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será:

$$5 \cdot 10^4 = 50000$$

- En sexto lugar, las centenas de millar: 6, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 105.

$$6 \cdot 10^5 = 600000$$

- Y, por último, las unidades de millón: 4, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 106 :

$$4 \cdot 10^6 = 4000000$$

Con esto observamos que el número 4652031 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$4652031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 1$$

Actividades propuestas

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 7653 b) 30500 c) 275643 d) 200543

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 5 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 508744 b) 65339001 c) 7092157 d) 9745

3. Razona por qué en un número natural con dos cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

$$I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$$

Ejemplo:

El número MDL equivale en el sistema decimal al 1550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1555, pero las cifras siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo (como los meses de un año)

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas: el 0 y el 1

Actividades propuestas

4. ¿Podrías escribir los números del 1 al 10 en el sistema binario?



Cifras del sistema



Reloj con números romanos

1.2. Operaciones elementales

Multiplicación de números naturales

Nota:

Aunque en primaria se usaba el símbolo "x" para denotar el producto, a partir de ahora y, por comodidad, lo simbolizaremos con un punto: ·

Como ya sabes, **multiplicar dos números naturales** es equivalente a sumar uno de ellos consigo mismo tantas veces como indica el otro.

Por ejemplo:

Hacer $6 \cdot 5$ es lo mismo que hacer $6 + 6 + 6 + 6 + 6$

Recuerda que:

Las palabras "multiplicación" y "producto" significan lo mismo, es decir, hacen referencia a la misma operación.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

Si llamamos a, b y c a tres números naturales, se cumple la siguiente propiedad:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por ejemplo:

Sustituyendo las letras a por 2, b por 5 y c por 7, tenemos que:

$$2 \cdot (5 + 7) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$$

Esta propiedad también se cumple para la resta.

Nota

Recuerda la propiedad conmutativa de la multiplicación:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplo:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Considerando otra vez, a, b y c números naturales cualesquiera, se cumple que:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Estas propiedades son muy útiles para hacer cálculos mentales rápidos descomponiendo números:

Calcular $15 \cdot 23$ mentalmente es complicado, pero si hacemos:

$$15 \cdot 23 = 15 \cdot (20 + 3) = 15 \cdot 20 + 15 \cdot 3 \text{ resulta más sencillo.}$$

Si leemos la igualdad de derecha a izquierda, es decir:

$15 \cdot 20 + 15 \cdot 3 = 15 \cdot (20 + 3)$ se suele decir que *hemos sacado factor común el número 15*, pero realmente estamos hablando otra vez de la propiedad distributiva.

Generalizando:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ es lo mismo que: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, y utilizando la propiedad conmutativa:

$$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ es lo mismo que: $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, y utilizando la propiedad conmutativa:

$$b \cdot a - c \cdot a = (b - c) \cdot a$$

Ejemplos:

- $870 \cdot 4 - 870 \cdot 3 = 870 \cdot (4 - 3) = 870 \cdot 1 = 870$
- $450 \cdot 2 + 3 \cdot 450 = (2 + 3) \cdot 450 = 5 \cdot 450 = 2250$
- $45 \cdot 6 - 45 \cdot 5 = 45 \cdot (6 - 5) = 45 \cdot 1 = 45$

División de números naturales

En el comedor del instituto las mesas son de 6 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 33 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 5 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r} 33 \overline{) 6} \\ \underline{3} \\ 5 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se llaman:

33 → Dividendo

6 → Divisor

5 → Cociente

3 → Resto

Además, como ya sabes, se cumple que: $33 = 6 \cdot 5 + 3$

Esta propiedad se cumple siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ \underline{r} \\ C \end{array}$$

Se cumple que:

$$D = d \cdot c + r$$

Ejemplo:

El cociente entre 3658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

Nota:

La palabra "cociente" significa el resultado de hacer una "división". Los símbolos utilizados para representarlas son:

/, :, y la fracción: —

$$3658 = 65 \cdot 56 + 18$$

Ejemplos:

$25/5$, $25:5$ y $\frac{25}{5}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 25 entre 5.

La expresión:

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 5} \\ 0 \quad 5 \end{array}$$

También significa lo mismo, pero en Secundaria y Bachillerato apenas se utiliza, así que conviene que te familiarices cuanto antes con las anteriores.

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

$$325 \div 5 = 65$$

Pero si hacemos:

$$325 \div 15 = 21.666666667$$

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: $325 - (15 \cdot 21) = 10$.

Jerarquía de las operaciones

En la expresión: $3 \cdot 4 + 2$, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería:

$$3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$$

En general:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **multiplicaciones y divisiones** y luego, las **sumas y restas**.

Ejemplo:

Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45$$

Notas

- Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: $(21 \cdot 2) + 30$ resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.
- Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Actividades propuestas

- Saca factor común y calcula mentalmente:
 - $23 \cdot 4 - 23 \cdot 3$
 - $350 \cdot 5 + 540 \cdot 2$
 - $55 \cdot 13 - 55 \cdot 3$
 - $600 \cdot 33 - 600 \cdot 3$
- Construye dos números con las cifras 4, 5 y 6 tal que su producto sea lo más grande posible.
- Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$
 - $6738 : 456$
 - $34540 : 30$
 - $240035 : 981$
 - $397 : 45$
- ¿Recuerdas la definición de división exacta? ¿Qué ocurre en la igualdad anterior si la división es exacta?
- El equipo de fútbol del instituto decide celebrar su victoria de liga yendo de viaje con su entrenador. Sabiendo que el equipo lo componen 20 alumnos, que el viaje les cuesta a cada uno 150 €, la noche en habitación individual 50 € y que han pagado 7350 € en total, ¿cuántos días han estado de viaje?

2. DIVISIBILIDAD

2.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

Escribe en tu cuaderno la del 5 y la del 7.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 5 y de 7

Se definen los **múltiplos** de un número entero n como los números que resultan de multiplicar ese número n por todos los números enteros.

Ejemplo:

La tabla del 5 que has escrito antes está formada por los valores:

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90,....

Todos ellos son múltiplos de 5.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{5}$

Es decir: $\dot{5} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots\}$

Ejemplo:

Cuenta los múltiplos de 5 que has escrito antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

10. Calcula los siete primeros múltiplos de 8 y de 9

11. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 12?

12, 13, 22, 24, 25, 100, 112, 142, 144

12. Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 12 y 90.

Divisores enteros de un número

Un número entero a es **divisor** de otro número entero b cuando al dividir b entre a , el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

- 2 es divisor de 8 porque al dividir 8 entre 2, el resto es 0.
- 10 es divisor de 20 porque al dividir 20 entre 10, el resto es 0.
- 6 es divisor de 36 porque al dividir 36 entre 6, el resto es 0.
- 1 es divisor de 18 porque al dividir 18 entre 1, el resto es 0.
- 18 es divisor de 18 porque al dividir 18 entre 18, el resto es 0.

Si a es **divisor** de b , entonces también se dice que b es **divisible** por a .

Ejemplo:

- 8 es divisible por 2 porque 2 es divisor de 8, es decir, al dividir 8 entre 2, el resto es 0.
- 20 es divisible por 10 porque 10 es divisor de 20, es decir al dividir 20 entre 10, el resto es 0.
- 36 es divisible por 6 porque 6 es divisor de 36, es decir, al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

Notas

- Como habrás deducido, las relaciones ser *múltiplo* y ser *divisor* son relaciones inversas.
- No confundas** las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

De la igualdad: $5 \cdot 3 = 15$, podemos deducir lo siguiente:

- 5 y 3 son divisores de 15.
- 15 es múltiplo de 3 y de 5.
- 15 es divisible por 3 y por 5.

Actividades propuestas

13. A partir de la igualdad: $6 \cdot 4 = 24$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

14. Escribe frases usando las expresiones: "ser múltiplo de", "ser divisor de" y "ser divisible por" y los números 10, 5 y 35.

2.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por 2 cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

Los números: 312, 50, 346, 500, 780, 988 son divisibles por 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3

Ejemplo:

- El número 231 es divisible por 3 ya que $2 + 3 + 1 = 6$ que es múltiplo de 3.
- El número 1002 es divisible por 3 ya que $1 + 0 + 0 + 2 = 3$.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 69 es divisible por 3 ya que $6 + 9 = 15$, y 15 es divisible por 3, pues $1 + 5 = 6$ que es múltiplo de 3. Por tanto, 6, 15 y 69 son múltiplos de 3
- El número 78596778696 es divisible por 3 ya que $7 + 8 + 5 + 9 + 6 + 7 + 7 + 8 + 6 + 9 + 6 = 78$, y 78 es divisible por 3 pues $7 + 8 = 15$, y 15 lo es.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por 4 si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

El número 3628 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

Los números 4875 y 34590 son divisibles por 5.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por 6 cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

El número 7332 es divisible por 6 ya que:

- Lo es por 2 por ser par.
- Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9

Ejemplo:

El número 6012 es divisible por 9 ya que: $6 + 0 + 1 + 2 = 9$

El número 3903 no es divisible por 9 ya que: $3 + 9 + 0 + 3 = 15$ que no es múltiplo de 9

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por 10 cuando termina en 0

Ejemplo:

El número 59870 es divisible por 10.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

El número 80496 es divisible por 11 ya que: $(8 + 4 + 6) - (0 + 9) = 11$

Actividades propuestas

15. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 2:

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4520, 3411, 46295, 16392, 385500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 2? ¿Y con los que son divisibles por 2?

16. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 3 a la vez.
17. Sustituye A por un valor apropiado para que:
- 24 A75 sea múltiplo de 3.
 - 1107 A sea múltiplo de 6.
 - 5 A439 sea múltiplo de 11.
18. ¿Todos los números divisibles por 3 los son por 9? ¿Y al revés? Razona la respuesta.
19. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.
20. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
2567	Divisible por 2	
498650	Divisible por 5	
98370034	Divisible por 3	
78337650	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

2.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero N , lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4, ..., N . De esta manera, los divisores de N serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

Si queremos hallar los divisores de 18 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5, ..., 18 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que N sea divisible.

Si la división es exacta, $N : d = c$, entonces el divisor (d) y el cociente (c) son divisores de N , lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.

Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 54.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 54.

Es divisible por 2. (Termina en cifra par) $\rightarrow 54 : 2 = 27 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 2 y 27.

Es divisible por 3. ($5 + 4 = 9$, múltiplo de 3) $\rightarrow 54 : 3 = 18 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 3 y 18.

Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) $\rightarrow 54 : 6 = 9 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 6 y 9.

Es divisible por 9. ($5 + 4 = 9$, múltiplo de 9) $\rightarrow 54 : 9 = 6$.

Como el cociente 6 es menor que el divisor 9, ya hemos terminado. 9 y 6 (Repetidos).

Por tanto, los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Actividades propuestas

21. Calcula los múltiplos de 25 comprendidos entre 1 y 200.

22. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- 40 es múltiplo de 10.
- 2 es divisor de 10.
- 4 es múltiplo de 8.
- 55 es divisible por 11.
- 90 es divisor de 9.
- 3 es divisible por 45.

23. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: $256x81y$

24. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

25. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

- a) 65 b) 33 c) 60 d) 75 e) 100 f) 150

3. NÚMEROS PRIMOS

3.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores de 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores, es decir, al que no es primo.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.

- Números como: 22, 45, 60, 98, 345 o 39867657 son compuestos.

Actividades propuestas

26. Continúa la lista de números primos del ejemplo 20 con 10 más.

27. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

3.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

- a) Construimos una lista con los números del 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.

- c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.

- d) Se repite de nuevo el paso d) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

- Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la lista como sigue:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una tabla así:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5 (algunos de los cuales ya estaban tachados)

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.
- Después nos encontramos con el 13 y tachamos los múltiplos de 13.

De forma análoga vamos localizando los siguientes primos y tachando sus múltiplos hasta llegar a una tabla de la forma:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números que no quedan tachados en ningún paso es porque no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de "filtro" por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los "primos".

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 y 97.

Actividades propuestas

28. ¿Te atreverías a repetir la criba de Eratóstenes, pero hasta el 150?

29. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

3.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número.

Por ejemplo, si quiero expresar 13 como producto de dos números, sería:

$$13 = 1 \cdot 13 \text{ o también } 13 = 13 \cdot 1$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo. Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

Para descomponer el número 20 podríamos hacer: $20 = 4 \cdot 5$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 4 no es un número primo.

Su descomposición sería $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, que se expresaría como $20 = 2^2 \cdot 5$

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, descomponer un número primo no tiene ningún interés ni dificultad) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.

3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

Por ejemplo: $60 = 30 \cdot 2$

Como $30 = 15 \cdot 2$ y $15 = 3 \cdot 5$, tenemos que: $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ y por tanto, su descomposición es: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 90:

Como 90 es múltiplo de 2, lo dividimos: $90 : 2 = 45$

Como 45 no es múltiplo de 2, buscamos el menor primo posible por el que se pueda dividir, que es 3, lo dividimos: $45 : 3 = 15$.

Como 15 se puede volver a dividir entre 3, tenemos: $15 : 3 = 5$

Por tanto: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Esto se suele realizar como se señala en la nota 1 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2. Vamos a realizar otra factorización para el número 2550:

$$\begin{array}{r|l} 2550 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto: $2550 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Actividades propuestas

30. Descompón en factores primos los siguientes números:
a) 40 b) 56 c) 75 d) 90
31. Descompón en factores primos los siguientes números:
a) 110 b) 124 c) 290 d) 366
32. Descompón en factores primos los siguientes números:
a) 1290 b) 3855 c) 4520 d) 5342
33. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?
34. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256?
¿Podrías continuar tú la serie con 5 números más?

3.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

Vamos a calcular los divisores de los números 24 y 36:

Divisores de 24 → 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Divisores de 36 → 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18

¿Cuáles son los mayores divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, pero el mayor de ellos es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 24 y de 36.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

En el ejemplo anterior, escribiríamos: $M.C.D(24, 36) = 12$

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

- Factorizamos los números
- Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.
- El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D

Actividades resueltas

Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 72, 90 y 120

- Factorizamos cada número:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

- Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente: Son 2 y 3

- El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$M.C.D(72, 90, 120) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

35. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:
a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80
36. Calcula el M.C.D de los siguientes números:
a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

3.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el m.c.d., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy "rudimentaria" y que se complica mucho para números grandes.

Vamos a calcular m.c.m (10, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 10 → 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...

Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, 75, 90, ...

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 30, 60, 90, ... pero el menor de ellos es el 30. Por tanto:

$$\text{m.c.m}(10, 15) = 30$$

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 16, 24, 40 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números

$$16 = 2^4$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

En nuestro caso: 2^4 , 3 y 5

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m}(16, 24, 40) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$$

Actividades propuestas

37. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

- a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80

38. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

- a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16

Problemas

Pero, además, el cálculo del m.c.d. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de lazo rojo de 15 m y uno azul de 20 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y las quiere cortar en trozos de la misma longitud para tenerlas preparadas para hacer empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima que puede cortar cada rollo para hacer los paquetes?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 20 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D.:

$$\text{M.C.D.}(15, 20) = 5$$

Por tanto, la longitud de cada trozo de lazo para los paquetes será de 5 m.

Ejemplo:

El abuelo de Ana toma unas pastillas para el corazón cada 8 horas y otras para la circulación cada 12 horas.

Acaba de tomar los dos medicamentos a la vez.

¿Dentro de cuantas horas volverá a tomárselos a la vez?

Estamos buscando un número de horas que será mayor o igual a 12, y múltiplo de 8 y de 12 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

$$\text{m.c.m.}(8, 12) = 24$$

Por tanto, dentro de 24 horas se tomará ambos medicamentos a la vez.

Actividades propuestas

39. María y Paula tienen 25 cuentas blancas, 15 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.
- ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
 - ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?
40. Un autobús pasa por una parada cada 18 minutos, otro cada 25 minutos y un tercer autobús cada 36 minutos. Si a las 9 de la mañana han pasado en ese lugar los tres autobuses a la vez. ¿A qué hora vuelven a coincidir?
41. Se compran en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos centros de mesa se pueden elaborar si se coloca la máxima cantidad de flores sin que sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles se colocan en cada centro de mesa?
42. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 60 minutos, otro que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.
- ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?
 - ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?
43. ¿Cuál será la menor cantidad de caramelos que se puede repartir en partes iguales entre grupos de 20, 30, o 60 niños? Determina en cada caso cuántos caramelos les toca a cada niño.

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1845 que en 6351
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas.	La operación $2 \cdot 3 + 7$ tiene como resultado 13, no 20, que es lo que resultaría efectuando incorrectamente antes la suma que el producto.
- Divisor - Divisible - Múltiplo	- a es divisor de b cuando al dividir b entre a el resto es 0. - a es múltiplo de b o a es divisible por b cuando al dividir a entre b el resto es 0.	<ul style="list-style-type: none"> • 2 y 3 son divisores de 6. • 6 es múltiplo de 2 y de 3. • 6 es divisible por 2 y por 3.
Criterios de divisibilidad	Simplifican mucho el cálculo de la descomposición factorial y, en general averiguar cuando un número es divisible por otro.	<ul style="list-style-type: none"> • 3742 es divisible por 2. • 4980 es divisible por 2 y por 5. • 2957 es divisible por 3.
Número primo	Es aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Es aquel que tiene más de dos divisores, es decir, que no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2,3,5,7,11,13,17 y 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m.(18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D.(18, 12) = 4